Тождества Булевой алгебры

Основная задача математической логики — на основании ложности или истинности простых высказываний определить значение сложного высказывания.

Логические операции

В алгебре высказываний логические связки заменяются логическими операциями.

И — логическое умножение или конъюнкция

Обозначение операции в алгебре высказываний: **И, ϖ, •, &.**

Обозначение в языках программирования: **and**.

Если обозначить простые высказывания А = «*Саша играет на гитаре*»; В = «*Саша играет на фортепиано*», тогда сложное высказывание F = «*Саша играет на гитаре и на фортепиано*» можно записать как **F = A ∧ B.**

Логические переменные А и В, входящие в формулу, могут принимать значения 1 (ИСТИНА) или 0 (ЛОЖЬ). Значение функции логического умножения F можно определить по **таблице истинности** данной функции.

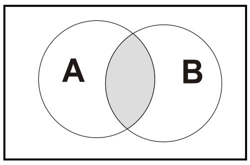
Таблица истинности показывает, какие значения принимает логическая функция при всех возможных наборах ее аргументов.

<u>Таблица истинности операции И</u>

A	B	F = A ∧ B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

<u>Диаграмма Эйлера — Венна</u>

В алгебре множеств конъюнкции соответствует операция **пересечения множеств.**



Из таблицы видно, что конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны. Между таблицей истинности и диаграммой Эйлера – Венна существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому число единиц для F всегда будет совпадать с числом заштрихованных областей на диаграмме.

ИЛИ — логическое сложение или дизъюнкция

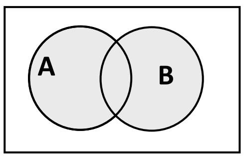
Обозначение операции в алгебре высказываний: **ИЛИ, ω , +.**
Обозначение в языках программирования: **or**.
Обозначим сложное высказывание «*Мама купила торт или конфеты*» буквой F и запишем его на языке алгебры логики.
Пусть А — «*Мама купила торт*»; В — «*Мама купила конфеты*», тогда **F = A ∨ B.**

<u>Таблица истинности операции ИЛИ</u>

A	B	F = A ∨ B
0	0	0
0	1	1

<u>Диаграмма Эйлера-Венна</u>

В алгебре множеств дизъюнкции соответствует операция объединения множеств.



1	0	1
1	1	1

Из таблицы истинности видно, что дизъюнкция двух высказываний является ложной тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны и истинной, когда хотя бы одно из двух высказываний истинно.

НЕ — логическое отрицание или инверсия

Обозначение отрицания в алгебре высказываний: **НЕ A, $\bar{A}$, ¬ A.**

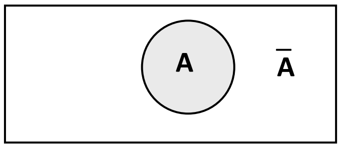
Обозначение в языках программирования: **not**.

Пусть A = «*Четыре — четное число*» — истинное высказывание, тогда высказывание «*Четыре — нечетное число*» будет являться отрицанием высказывания A и будет ложно. На языке алгебры логики это будет выглядеть как F = $\bar{A}$.

<u>Таблица истинности операции НЕ</u>

A	**F = $\bar{A}$**
0	1
1	0

<u>Диаграмма Эйлера-Венна</u>



ЕСЛИ–ТО — логическое следование или импликация

Обозначение импликации в алгебре высказываний: → .

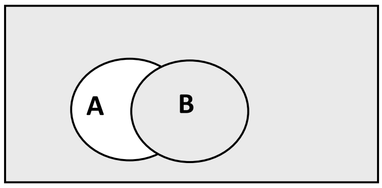
Пусть высказывание A = «*Данный четырёхугольник — квадрат*» и высказывание B = «*Около данного четырёхугольника можно описать окружность*».

Тогда составное высказывание **F = A → B** понимается как «*Если данный четырёхугольник квадрат, то около него можно описать окружность*».

<u>Таблица истинности операции «импликация»</u>

A	**B**	**F = A → B**
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

<u>Диаграмма Эйлера-Венна</u>



В формуле F = A → B переменная A называется **основанием**, а B — **следствием**. Говорят, «*Если A, то B*», «*A влечет B*» или «*Из A следует B*».

Импликация является одной из самых важных операций алгебры логики. Из таблицы истинности видно, что импликация истинна всегда, за исключением случая, когда основание A истинно, а следствие B — ложно.

Чтобы лучше понять эту логическую операцию, рассмотрим два высказывания и их импликацию:

A = *У ребенка высокая температура*;
B = *Ребенок болен*;
A → B = *Если у ребенка высокая температура, то он болен*.

Подставим в таблицу истинности высказывания, соответствующие входным значениям A и B и проанализируем значение F.

1: (A=0, B=0) *У ребенка нет высокой температуры; Ребенок не болен;* F = 1.
2: (A=0, B=1) *У ребенка нет высокой температуры; Ребенок болен;* F = 1.

3: (A=1, B=0) *У ребенка высокая температура; Ребенок не болен;* F = 0.
4: (A=1, B=1) *У ребенка высокая температура; Ребенок болен;* F = 1.

Истинность 1 и 4 строк и ложность 3 строки очевидна. В строке 2 видим, что при ложном основании следствие может быть и истинным. В нашем примере — не всякая болезнь сопровождается высокой температурой.

Чтобы лучше понять диаграмму Эйлера–Венна, выразим операцию «импликация» через базовые операции ИЛИ и НЕ:

$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$

A	**B**	**A → B**	$\bar{\mathbf{A}}$	$\bar{\mathbf{A}} \vee \mathbf{B}$
0	0	1		
0	1	1		
1	0	0		
1	1	1		

Проверьте по таблице истинности, что две формулы $A \rightarrow B$ и $\bar{A} \vee B$ являются равносильными, т. к. у них совпадают значения последнего столбца таблицы.

РАВНОСИЛЬНО — логическое равенство или эквиваленция

Эквиваленция (двойная импликация) — это логическая операция, выражаемая связками *тогда и только тогда…, когда; необходимо и достаточно; равносильно; в том и только том случае.*

Обозначение эквиваленции в алгебре высказываний: **↔, ~, ≡.**

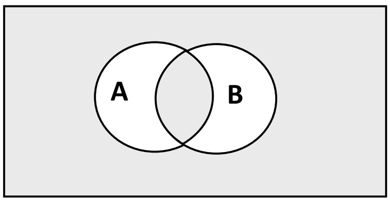
Пусть высказывание A = «*Идет дождь*» и высказывание B = «*На небе тучи*».

Тогда составное высказывание **F = A ↔ B** понимается как «*Дождь идет тогда и только тогда, когда на небе есть тучи*».

Таблица истинности операции «эквиваленция»

A	**B**	**F = A ↔ B**
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Диаграмма Эйлера-Венна



Функция F = A ↔ B (A равносильно B) истинна только в том случае, когда A и B либо оба истинны, либо оба ложны.

Рассмотрим два высказывания (A, B) и составное высказывание F = A ↔ B.

A = *Крыши домов мокрые;*
B = *Идет дождь.*
A ↔ B = *Крыши домов мокрые тогда и только тогда, когда идет дождь.*

Подставьте в таблицу истинности высказывания, соответствующие входным значениям A и B (0 и 1) и проанализируйте значение F.

Таблицы истинности

Для каждого составного высказывания (логического выражения) можно построить таблицу истинности, которая показывает, при каких комбинациях исходных значений все логическое выражение истинно, а при каких ложно.

Рассмотрим алгоритм построения таблицы истинности на примере логического выражения $F = A \vee \overline{C} \wedge B$.

1. Определяем количество переменных в логическом выражении. В нашем выражении три переменные (A, B, C). Каждая переменная может принимать значение 0 и 1. Все возможные сочетания переменных называют набором входных переменных.

2. Количество строк в таблице равно количеству наборов входных переменных, которое определяем по формуле $\mathbf{Q = 2 \cdot N}$, где **N** — количество переменных в выражении. В нашем примере $Q = 2^3 = 8$. В таблице будет 8 строк.

3. Количество столбцов в таблице равно количеству переменных плюс количество операций. В нашей таблице будет 6 столбцов: 3 переменные (A, B, C) + 3 операции (НЕ, И, ИЛИ).

4. Строим таблицу размером 8х6, добавляем сверху обозначения столбцов и заполняем входные наборы данных.

<u>Как быстро и без ошибок заполнить входные наборы переменных</u>

Способ 1. Общее количество наборов (у нас 8) разделим пополам и заполним первый столбец так: 4 нуля, затем 4 единицы.

Теперь 4 разделим пополам и заполним второй столбец:
2 нуля, 2 единицы, 2 нуля, 2 единицы.

Разделим 2 пополам и заполним третий столбец:
ноль, единица, ноль, единица и т. д. до конца столбца.

Способ 2. Каждый набор переменных составляет его порядковый номер
(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), записанный в двоичной системе счисления.
Для трех переменных получим: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Заполняем остальные столбцы таблицы, выполняя логические операции над переменными с учетом приоритета операций и в соответствии с их таблицами истинности.

$$F = A \vee \overline{C} \wedge B$$

A	B	C	$\overline{C}$	$\overline{C} \wedge B$	$A \vee \overline{C} \wedge B$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

Из таблицы видно, что логическое выражение истинно при следующих наборах переменных (A, B, C):

1. (0, 1, 0); 2. ____________ 3. _____________ 4. _____________.

Основные законы алгебры логики

В алгебре логики имеется ряд законов, позволяющих производить равносильные преобразования логических выражений.

Закон	Для ИЛИ	Для И
Переместительный	$A \vee B = B \vee A$	$A \cdot B = B \cdot A$
Сочетательный	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Распределительный	$(A \vee B) \cdot C = A \cdot C \vee B \cdot C$	$(A \cdot B) \vee C = (A \vee C) \cdot (B \vee C)$
Правила де Моргана	$\overline{A \vee B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} \vee \overline{B}$
Идемпотентности	$A \vee A = A$	$A \cdot A = A$
Исключения третьего и противоречия	$A \vee \overline{A} = 1$	$A \cdot \overline{A} = 0$
Операции с константами	$A \vee 1 = 1$ $A \vee 0 = A$	$A \cdot 1 = A$ $A \cdot 0 = 0$
Поглощения	$A \vee (A \cdot B) = A$	$A \cdot (A \vee B) = A$
Склеивания	$(A \cdot B) \vee (\overline{A} \cdot B) = B$	$(A \vee B) \cdot (\overline{A} \vee B) = B$
Контрапозиции	$A \to B = \overline{B} \to \overline{A}$	
Двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
Формулы упрощения	$A \to B = \overline{A} \vee B$ $A \leftrightarrow B = (A \to B) \cdot (B \to A) = (\overline{A} \vee B) \cdot (\overline{B} \vee A)$	

Упрощение логических формул

Любую логическую формулу, применяя законы логики, можно записать в виде логического выражения через инверсию, конъюнкцию и дизъюнкцию. Такая форма представления называется **нормальной**.

> Под упрощением логической формулы понимают равносильное преобразование, приводящее к формуле, которая содержит меньшее число операций конъюнкции и дизъюнкции и не содержит отрицаний неэлементарных формул.

Приемы и способы упрощения логических выражений

При преобразовании логических формул используют законы алгебры логики, правила операций с логическими константами, а также некоторые приемы, применяемые в обычной алгебре, например, вынесение общего множителя за скобки.

Примеры упрощения логических формул:

1) $$\underbrace{\overline{x \vee y}}_{\text{формула де Моргана}} \cdot (x \cdot \bar y) = \underbrace{\bar x \cdot \bar y \cdot (x \cdot \bar y)}_{\text{формула де Моргана}} = \underbrace{\overbrace{\bar x \cdot x}^{0} \cdot \overbrace{\bar y \cdot \bar y}^{y}}_{\text{сочетательный закон}} = 0 \cdot \bar y = 0$$

2) $$\bar x \cdot y \vee \underbrace{\overline{x \vee y}}_{\text{формула де Моргана}} \vee x = \bar x \cdot y \vee \underbrace{\bar x \cdot \bar y}_{\text{формула де Моргана}} \vee x = \overbrace{\underbrace{\bar x}_{\text{выносим за скобки}} \cdot \underbrace{(y \vee \bar y)}_{1}}^{\bar x \cdot 1 = \bar x} \vee x = \bar x \vee x = 1$$

3) $$(x \vee y) \cdot (\bar x \vee y) \cdot (\bar x \vee \bar y) = \overbrace{(x \vee y) \cdot (\bar x \vee y)}^{\text{по формуле склеивания } y} \cdot \overbrace{\underbrace{(\bar x \vee y)}_{\text{повторили второй множитель } (A \cdot A = A)} \cdot (\bar x \vee \bar y)}^{\text{по формуле склеивания } \bar x} = y \cdot \bar x$$

$$x \cdot \bar y \vee x \cdot y \cdot z \vee x \cdot \bar y \cdot z \vee x \cdot y \cdot z = x \cdot (\bar y \vee \overline{y \cdot z} \vee \overbrace{\bar y \cdot z \vee y \cdot z) =}^{\text{x вынесли за скобки}}$$

$$x \cdot ((\bar y \vee \bar y \cdot z) \vee \overbrace{(y \cdot z \vee y \cdot z)) = \underbrace{x \cdot 1}_{1} = x}^{\text{сгруппировали слагаемые}}$$

$(A \vee 1 = 1)$

5) $$x \cdot y \vee \bar z = \overline{\overline{x \cdot y \cdot \bar z}} = (\bar x \vee \bar y) \cdot z$$

Дважды применяется правило де Моргана и закон двойного отрицания.

6) $(x \cdot \bar{y} \vee z) \cdot (\underbrace{\bar{x} \vee y) \vee \bar{z} = x \cdot \bar{y} \cdot \bar{x}}_{\text{распределительный закон для ИЛИ}} \vee x \cdot \bar{y} \cdot \underbrace{y \vee z \cdot \bar{x}}_{0} \vee \underbrace{z \cdot y \vee \bar{z} =}_{0}$

$= 0 \vee 0 \vee (z \cdot (\bar{x} \vee y)) \vee \underbrace{\bar{z} = (z \vee \bar{z}) \cdot (\bar{x} \vee}_{\text{распределительный закон для И}} \underbrace{y \vee \bar{z}) =}_{1} \bar{x} \vee y \vee \bar{z}$

7) $x \rightarrow \bar{y} \vee x = \underbrace{\bar{x} \vee \overline{\bar{y}}}_{\text{формула упрощения для}} \overline{\vee x} = \bar{x} \cdot \underbrace{\overline{\bar{y} \vee x}}_{} = x \cdot y \vee \underbrace{\bar{x} = \bar{x}}_{\text{формула}} \cdot (y \vee 1) = x \cdot 1 = x$